CH8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 19

1. $17x\equiv 1(33)$ On remarque que 2 est une solution particulière donc

$$17x\equiv 1(33) \Leftrightarrow 17x\equiv 17.2(33)\Leftrightarrow 17.(x-2)\equiv 0(33)\Rightarrow \left.\begin{matrix}33\mid 17(x-2)\\ or\ 33\wedge 17=1\end{matrix}\right)\Rightarrow 33\mid x-2\Rightarrow x=33k+2$$

Cl : $S_{\mathbb{Z}}=\{33k+2, k\in\mathbb{Z}\}$

2. Ona $17x2\equiv 1(33)\Rightarrow 17x2x(-9)\equiv -9(33)$ donc $2x(-9)=-18\equiv 15(33)$ est une solution particulière Donc $17x\equiv -9(33) \Leftrightarrow 17x\equiv 17.15(33)\Leftrightarrow 17(x-15)\equiv 0(33) \Rightarrow$

33 divise 17(x-15) et comme $33\wedge 17=1$ Donc 33divise $x-15\Rightarrow x=33k+15$

Cl : $S_{\mathbb{Z}}=\{33k+15, k\in\mathbb{Z}\}$

EX 20

$12x\equiv 30y(15) \Leftrightarrow 12x\equiv 0(15)\Leftrightarrow 12x=15k\Leftrightarrow 4x=5k\Rightarrow 5$ divise 4x et comme $5\wedge 4=1\Rightarrow 5$ divise x

Donc x est un multiple de 5 et y est quelconque

Donc l'ensemble des couples (x,y) /$12x\equiv 30y(15)$ est $\{(5k,y) ; k\in\mathbb{Z} \text{ et } y\in\mathbb{Z}\}$

EX 21

$11x\equiv 99y(77)\Leftrightarrow 11x= k.77+99y\Leftrightarrow x=k.7+9y$

Donc l'ensemble des couples (x,y) /$11x\equiv 99y(77)$ est $\{(7k+9y,y) ; k\in\mathbb{Z} \text{ et } y\in\mathbb{Z}\}$

EX 22

1. Soit $d=a\wedge b \Rightarrow d \mid 2b-3a=7 \Rightarrow d=1$ ou $d=7$ Donc les valeurs possibles de $a\wedge b$ sont 1 et 7
2. a/ $3a-2b= 3(2n-3)-2(3n-1)= -7$ Donc pour tout n le couple(a,b) est une solution de (E).

b/ (E) :$3x-2y=-7\Leftrightarrow 3x-2y=3a-2b\Leftrightarrow 3(x-a)=2(y-b)$

$\Rightarrow 3 \mid 2(y-b)$ et comme $3\wedge 2=1$ Donc $3 \mid y-b\Rightarrow y= 3k+b=3k+3n-1=3(k+n)-1=3h-1$

Remplacons y par 3h-1 dans (E) on obtient : $3x=2(3h-1)-7\Rightarrow x=2h-3$

Cl : $S_{\mathbb{Z}x\mathbb{Z}}=\{(2h-3,3h-1) ; h\in\mathbb{Z}\}$

3. $a\wedge b=7\Rightarrow a\equiv 0(7)$ et $b\equiv 0(7)\Rightarrow a\equiv b(7)\Rightarrow 3n-1\equiv 2n-3(7)\Rightarrow n\equiv -2(7)\Rightarrow n\equiv 5(7)$

Réciproquement si $n\equiv 5(7) \Rightarrow n=7k+5 \Rightarrow a=2(7k+5)-3=14k+7=7(2k+1)\Rightarrow 7 \mid a$

$\Downarrow$

$b=3(7k+5)-1=21k-14=7(3k-2)\Rightarrow 7 \mid b$

On a donc $7 \mid a$ et $7 \mid b$ et comme les valeurs possibles de $a\wedge b$ sont 1 et 7 donc

Cl : $\boxed{a\wedge b=7 \quad ssi \quad n=5+7k \ ; k\in\mathbb{Z}}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn